

5-й выпускъ 7-го тома собранія протоколовъ секціи физико-математическихъ наукъ въ Казани. (Засѣданія 83-е, 84-е и 85-е).

Протоколъ 83-го засѣданія

7-го Января 1889 года.

(Въ засѣданіи присутствовало 20 членовъ).

I. *Н. П. Слугиновъ* сдѣлалъ сообщеніе „объ оптическихъ рулеткахъ“. Сообщеніе помѣщается въ приложеніи къ протоколу.

II. *Г. Н. Шебуевъ* сдѣлалъ сообщеніе: „о вліяніи упругаго послѣдствія на колебаніе струнъ“. Сообщеніе помѣщается въ приложеніи къ протоколу.

III. *Н. А. Миславскій* сдѣлалъ сообщеніе: „о фотохимическихъ процессахъ въ сѣтчатой оболочкѣ глаза“.

Вице-Предсѣдатель секціи *Θ. Суворовъ*.

Секретарь секціи *М. Сегель*.

Протоколъ 84-го засѣданія.

15 Февраля 1889 года.

(Въ засѣданіи присутствовали 20 членовъ и 10 постороннихъ лицъ).

I. Секретарь секціи сообщилъ о полученной секціею отъ Общества Естествоиспытателей бумага, въ которой сообщается, что г. Министръ Народнаго Просвѣщенія Статсъ-Секретарь Графъ И. Д. Деляновъ въ отвѣтъ на ходатайство Общества и секціи объ увеличеніи отпускаемаго ежегодно

пособія изъ Государственнаго Казначейства на 800 руб. извѣстилъ, что г. Министръ Финансовъ, Тайный Совѣтникъ Вышнеградскій не находитъ достаточныхъ основаній къ удовлетворенію онаго ходатайства, такъ какъ всякая выдача пособія одному Обществу влечетъ за собою ходатайство о пособіяхъ со стороны другихъ ученыхъ обществъ, и такъ-какъ изданіе трудовъ Общества — на что и испрашивалась указанная выше сумма—можетъ быть производима Обществомъ и его секціей, безъ ущерба для дѣла, по мнѣнію г. Министра Финансовъ, періодически по мѣрѣ имѣющихся въ его распоряженіи средствъ безъ обремененія Государственнаго Казначейства новымъ расходомъ.

II. Секретарь секціи сообщилъ о полученномъ отъ Императорскаго Общества Любителей Естествознанія, Антропологии и Этнографіи экземплярѣ правилъ для соисканія преміи имени В. П. Мошнина, при чемъ общество и его физическое отдѣленіе почтительнѣйше проситъ содѣйствовать возможно широкому распространенію свѣдѣній о новоучрежденной преміи, имѣющей способствовать развитію научныхъ и техническихъ изслѣдованій въ нашемъ отечествѣ и извѣщаетъ, что слѣдующая очередная премія имѣетъ быть присуждена 15-го октября 1889 г. по предмету химіи. Правила для соисканія преміи В. П. Мошнина помѣщаются въ приложеніи къ протоколу.

III. Д. А. Гольдгаммеръ сдѣлалъ сообщеніе: „Этюды по теоріи свѣта“. Сообщеніе это будетъ напечатано въ приложеніи къ протоколамъ секціи.

IV. Н. П. Слугиновъ сдѣлалъ сообщеніе: „О скорости распространенія колебательнаго движенія“. Геометрическое разсмотрѣніе общаго интеграла колебательнаго движенія

$y = \varphi\left(t + \frac{x}{c}\right) + \psi\left(t - \frac{x}{c}\right)$, гдѣ y разстояніе точки отъ поло-

женія равновѣсія, t время, x разстояніе точки отъ начала и c постоянная, приводитъ къ слѣдующему выраженію для скорости распространенія колебательнаго движенія: $\frac{dx}{dt} = \frac{\varphi' + \psi'}{\psi' - \varphi'} c$. Докладчикъ разсмотрѣлъ слѣдствія, выводимыя изъ послѣдней формулы

V. Секретарь секціи прочелъ сообщеніе, присланное И. П. Долбнею: „О сложеніи эллиптическихъ аргументовъ 1-го, 2-го и 3-го вида“. Сообщеніе помѣщается въ приложеніи къ протоколу.

VI Н. П. Слугиновъ и Н. П. Казанкинъ показали слѣдующіе приборы:

1) Отражательный рычагъ Корню для измѣренія толщины тонкихъ предметовъ и радіусовъ кривизны оптическихъ стеколъ. Приборъ изготовленъ механикомъ Шпренгеромъ, сдѣлавшимъ въ немъ нѣкоторое измѣненіе.

2) Приборы В. В. Лермантова: для измѣренія коэффициента расширенія ртути и для измѣренія линейнаго коэффициента расширенія металловъ въ твердомъ состояніи.

3) Демонстративный аппаратъ для обнаруженія явленія Пельтье и 2 элемента: одинъ съ максимумомъ и другой съ минимумомъ поляризаціи.

За предсѣдателя секціи Г. Шебуревъ.

Секретарь секціи М. Сегель.

Протоколъ 85-го засѣданія

11 Марта 1889 г.

(Въ засѣданіи присутствовало 20 членовъ и около 10 постороннихъ посѣтителей.)

I) Единогласно приняты въ члены секціи по предложенію А. В. Васильева, М. С. Сегеля и Н. П. Слугинова.

175) *О. Первушинъ*, *Іоаннъ Михеевичъ*, священникъ (Шадринскаго уѣзда Пермской губерніи).

II) Предсѣдатель секціи сообщилъ, что *О. Первушинъ*, извѣстный своими работами по теоріи чиселъ, предполагаетъ въ ближайшемъ будущемъ прислать въ секцію замѣтку: „О дѣлителяхъ чиселъ вида 2^{2+m} .“

III) *Г. Н. Шебуревъ* сдѣлалъ сообщеніе: „О варіированіи системы векторовъ.“

IV) *К. И. Котеловъ* сдѣлалъ сообщеніе: „Объ особомъ видѣ разложенія нѣкоторыхъ голоморфныхъ функцій въ безконечныя произведенія.“ Сообщеніе помѣщается въ приложеніи къ протоколу.

V) *А. К. Жбиковскій* сдѣлалъ сообщеніе: „Къ вопросу о нахожденіи высшаго предѣла дѣйствительныхъ корней уравненій.“ Сообщеніе помѣщается въ приложеніи къ протоколу.

VI. Секретарь секціи прочелъ извлеченіе изъ письма *М. М. Фролова* къ *П. С. Порѣцкому*, гдѣ даны рѣшенія трехъ задачъ изъ теоріи волшебныхъ круговъ. Приводимъ одну изъ этихъ задачъ: три концентрическіе круга пересѣчены тремя другими концентрическими кругами; въ 18-ти точкахъ пересѣченія требуется расположить послѣдовательныя пѣлыя числа начиная съ единицы, такъ, чтобы на всѣхъ окружностяхъ были постоянными—сумма первыхъ степеней а также сумма квадратовъ чиселъ, поставленныхъ въ точкахъ пересѣченія. Рѣшеніе: числа по порядку на одной окружности: 8, 15, 1, 6, 16, 11; на другой: 13, 2, 9, 10, 5, 18; на третьей: 3, 7, 14, 17, 12, 4; на каждой окружности сумма первыхъ степеней—57; сумма квадратовъ—703.

Предсѣдатель секціи *А. Васильевъ*.
Секретарь секціи *М. Сегель*.

О СЛОЖЕНІИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХЪ АРГУМЕНТОВЪ

1-го, 2-го и 3-го вида.

С О О Б Щ Е Н І Е

И. ДОЛВНИ,

читанное 15 февр. 89 г. въ 84 засѣданіи физико-математической секціи Общества Естествоиспытателей при Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ.

§ 1. Знаменитая теорема Абеля, изложенная въ мемуарѣ „Précis d'une théorie des fonctions elliptiques ⁽¹⁾“, относится, какъ извѣстно, до сложения всѣхъ трансцендентныхъ функцій, имѣющихъ алгебраическіе дифференціалы. При помощи этой теоремы, какъ увидимъ ниже, съ чрезвычайною простотою, получаются формулы сложения эллиптическихъ аргументовъ 1-го, 2-го и 3-го вида.

Хотя вопросъ, которымъ мы займемся, можно считать почти исчерпаннымъ, тѣмъ не менѣе нѣсколько новая постановка задачи, быть можетъ, удостоится нѣкотораго вниманія.

Предложимъ себѣ à priori разыскать значенія x , для которыхъ

$$\Delta x = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$$

выражается цѣлою раціональною функціею x ⁽²⁾. Значенія эти опредѣляются алгебраическимъ уравненіемъ

$$\Delta x = a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots + lx^m \dots (1), \text{ или}$$

$$(\Delta x)^2 = (a + bx + cx^2 + \dots + lx^m)^2 \dots (2),$$

котораго степень и коэффициенты вполнѣ зависятъ отъ нашего произвола.

⁽¹⁾ Oeuvres complètes, 1881. 1, p 518.

⁽²⁾ Выраженная здѣсь основная идея, съ наибольшею ясностью, указана въ сочиненіи Halphen'a «Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications, 1886, ч. 1. p. 30, 58, 215.

Если мы желаемъ, чтобы уравненіе (2) имѣло p произвольныхъ корней

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_p, p < m,$$

то возьмемъ въ первой части уравненія

$$(a + bx + cx^2 + \dots + lx^m)^2 = (\Delta x)^2$$

цѣлую функцію съ p произвольными коэффициентами.

Такая широкая общность уравненія (2) даетъ возможность задачу о сложении эллиптическихъ аргументовъ рѣшить многими путями. Для назначенной цѣли достаточно, чтобы уравненіе (2) имѣло два произвольныхъ коэффициента. Въ сочиненіи Briot et Bouquet „Théorie des fonctions elliptiques“, 1875, р. 688 дается основному уравненію форма

$$(\Delta x)^2 = (1 + px + qx^2)^2.$$

Этой формой достигается тотъ результатъ, что, по освобожденіи отъ множителя x , уравненіе будетъ 3-й степени, слѣдовательно будетъ имѣть три корня, изъ которыхъ двумя можно располагать по произволу, потому что коэффициенты p и q не ограничены никакими условіями.

Абель ⁽¹⁾, а вслѣдъ за нимъ другіе писатели ⁽²⁾, даетъ уравненію (2) видъ

$$(1 - x^2)(1 - k^2 x^2) - (\alpha x + \beta x^3)^2 = f(x) = 0 \dots (3)$$

Это уравненіе имѣетъ шесть корней

$$\pm x_1, \pm x_2, \pm x_3.$$

Если x_1, x_2, x_3 удовлетворяютъ уравненію

$$\Delta x - (\alpha x + \beta x^3) = 0,$$

⁽¹⁾ Oeuvres complètes, 1881, Г. 1, р. 538.

⁽²⁾ J. Bertrand, Calcul integral, 1879, р. 582,
Сомовъ, Теорія эл. функцій, 1850, стр. 36.

то $-x_1, -x_2, -x_3$ удовлетворяют уравнению

$$\Delta x + \alpha x + \beta x^3 = 0.$$

Взявъ полный дифференціалъ (3), получимъ

$$f'x dx - 2(\alpha x + \beta x^3)(x d\alpha + x^3 d\beta) = 0, \text{ или}$$

$$f'x dx - 2\Delta x (x d\alpha + x^3 d\beta) = 0,$$

откуда

$$\frac{dx}{\Delta x} = 2 \frac{x}{f'x} d\alpha + 2 \frac{x^3}{f'x} d\beta, \text{ или}$$

$$x^2 \frac{dx}{\Delta x} = 2 \frac{x^3}{f'x} d\alpha + 2 \frac{x^5}{f'x} d\beta,$$

слѣдовательно

$$\sum_1^3 \frac{x_i^2 dx_i}{\Delta x_i} = 2d\alpha \sum_1^3 \frac{x_i^3}{f'x_i} + 2d\beta \sum_1^3 \frac{x_i^5}{f'x_i}.$$

На основаніи извѣстной теоремы Эйлера ⁽¹⁾ имѣемъ

$$\sum_1^3 \frac{x_i^3}{f'x_i} = 0,$$

$$\sum_1^3 \frac{x_i^5}{f'x_i} = -\frac{1}{2\beta^2},$$

Слѣдовательно

$$\sum_1^3 \frac{x_i^2 dx_i}{\Delta x_i} = -\frac{d\beta}{\beta^2}, \text{ откуда}$$

$$\int_0^{x_1} \frac{x_1^2 dx_1}{\Delta x_1} + \int_0^{x_2} \frac{x_2^2 dx_2}{\Delta x_2} + \int_0^{x_3} \frac{x_3^2 dx_3}{\Delta x_3} = \frac{1}{\beta} + \text{const.}$$

⁽¹⁾ Halphen, «Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications», 1886, T. 1, p. 216, 217.

Въ равенствѣ этомъ корнями x_1 и x_2 можемъ располагать по произволу. Сдѣлаемъ $x_1 = x_2 = 0$, тогда необходимо

$x_3 = 0$ ⁽¹⁾; а такъ какъ $\frac{1}{\beta^2} = x_1^2 x_2^2 x_3^2$, то, при $x_1 = x_2 =$

$x_3 = 0$, имѣемъ $\frac{1}{\beta} = 0$, слѣд.

$$\text{Const.} = 0,$$

а потому

$$\int_0^{x_1} \frac{x^2 dx}{\Delta x} + \int_0^{x_2} \frac{x^2 dx}{\Delta x} + \int_0^{x_3} \frac{x^2 dx}{\Delta x} = \frac{1}{\beta} = x_1 x_2 x_3 \dots (4)$$

Примѣчаніе 1. Свойство корней x_1, x_2, x_3 , заключающееся въ томъ, что, при $x_1 = x_2 = 0$, необходимо $x_3 = 0$, можетъ быть, между прочимъ, обнаружено слѣдующимъ образомъ. Имѣемъ

$$\alpha x_1 + \beta x_1^3 - \Delta x_1 = 0,$$

$$\alpha x_2 + \beta x_2^3 - \Delta x_2 = 0,$$

$$\alpha x_3 + \beta x_3^3 - \Delta x_3 = 0,$$

откуда

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1^3 & \Delta x_1 \\ x_2 & x_2^3 & \Delta x_2 \\ x_3 & x_3^3 & \Delta x_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Дѣлая $x_1 = 0$, получимъ

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_2 & x_2^3 & \Delta x_2 \\ x_3 & x_3^3 & \Delta x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_2^3 \\ x_3 & x_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_2^2 \\ 1 & x_3^2 \end{vmatrix} = 0, \text{ или}$$

(1) Bertrand, Calcul intégral, p. 581.

$$x_3^2 = x_2^2.$$

Если еще $x_2 = 0$, то необходимо $x_3 = 0$.

Примѣчаніе 2. При выводѣ формулы

$$\sum \int \frac{x_1^2 dx_1}{\Delta x_1} = x_1 x_2 x_3$$

мы взяли передъ $x_1 x_2 x_3$ знакъ плюсъ на слѣдующемъ основаніи.

$$\text{Назовемъ } \int_0^{x_1} \frac{dx}{\Delta x} = u_1, \int_0^{x_2} \frac{dx}{\Delta x} = u_2, \int_0^{x_3} \frac{dx}{\Delta x} = u_3$$

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0, \quad x_1 = \lambda u_1, \quad x_2 = \lambda u_2, \quad x_3 = \lambda u_3$$

$$\sum \int_0^{u_1} \lambda^2 u_1 du_1 = i \lambda u_1 \lambda u_2 \lambda u_3, \quad \text{гдѣ}$$

$$i = \pm 1$$

Дифференцируя по u_1 , найдемъ (см. § 2)

$$-i \lambda (u_1 + u_2) = \frac{\lambda^2 u_1 - \lambda^2 u_2}{\lambda u_2 \mu u_1 \nu u_1 - \lambda u_1 \mu u_2 \nu u_2}.$$

Полагая $u_2 = 0$, получимъ $\mu u_2 = 1$, $\nu u_2 = 1$, $\lambda u_2 = 0$, слѣд.

$-i \lambda u_1 = -\lambda u_1$, откуда $i = 1$.

§ 2. Изъ уравненія

$$\frac{dx}{\Delta x} = 2 \frac{x}{f'x} d\alpha + 2 \frac{x^3}{f'x} d\beta$$

получаемъ

$$\sum_1^3 \frac{dx_i}{\Delta x_i} = 2d\alpha \sum_1^3 \frac{x_i}{f'x_i} + 2d\beta \sum_1^3 \frac{x_i^3}{f'x_i},$$

откуда

$$\int_0^{x_1} \frac{dx_1}{\Delta x_1} + \int_0^{x_2} \frac{dx_2}{\Delta x_2} + \int_0^{x_3} \frac{dx_3}{\Delta x_3} = 0 \dots \dots (5)$$

Назовемъ

$$\int_0^{x_1} \frac{dx}{\Delta x} = u_1, \quad \int_0^{x_2} \frac{dx}{\Delta x} = u_2, \quad \int_0^{x_3} \frac{dx}{\Delta x} = u_3;$$

имѣемъ

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + u_3 &= 0, \\ u_3 &= -(u_1 + u_2), \\ x_1 &= \lambda u_1, \quad x_2 = \lambda u_2, \quad x_3 = \lambda u_3. \end{aligned}$$

Изъ уравненія (4) получаемъ

$$(6) \quad -\lambda u_1 \lambda u_2 \lambda (u_1 + u_2) = \int_0^{x_1} \lambda^2 u_1 du_1 + \int_0^{x_2} \lambda^2 u_2 du_2 + \int_0^{x_3} \lambda^2 u_3 du_3.$$

Положимъ, что u_3 есть постоянная величина, тогда

$$du_1 = -du_2.$$

Дифференцируя (6) по u_1 , получимъ

$$\begin{aligned} -\lambda(u_1 + u_2) [\mu u_1 \nu u_1 \lambda u_2 - \mu u_2 \nu u_2 \lambda u_1] &= \\ &= \lambda^2 u_1 - \lambda^2 u_2, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \lambda(u_1 + u_2) &= \frac{\lambda^2 u_1 - \lambda^2 u_2}{\lambda u_1 \mu u_2 \nu u_2 - \lambda u_2 \mu u_1 \nu u_1}, \text{ или} \\ \lambda(u_1 + u_2) &= \frac{\lambda u_1 \mu u_2 \nu u_2 + \lambda u_2 \mu u_1 \nu u_1}{1 - k^2 \lambda^2 u_1 \lambda^2 u_2} \dots (8) \end{aligned}$$

Мы видимъ, съ какою простотою получается основная формула теоріи обратныхъ эллиптическихъ функцій.

§ 3. Сложеніе аргументовъ 3-го вида производится также просто, хотя выкладка нѣсколько сложнѣе.

Имѣемъ, очевидно,

$$\frac{dx}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \Delta x} = \frac{2a^2 x}{(a^2 - x^2) f'(x)} d\alpha + \frac{2a^2 x^3}{(a^2 - x^2) f'(x)} d\beta.$$

Разлагая двѣ дроби $\frac{2a^2x}{(a^2-x^2)}$ и $\frac{2a^2x^3}{(a^2-x^2)f'x}$

по извѣстнымъ правиламъ, получимъ

$$\frac{2a^2x}{(a^2-x^2)f'x} = \frac{a^2}{f'a} \left(\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a+x} \right) + \frac{\varphi(x)}{f'x},$$

$$\frac{2a^2x^3}{(a^2-x^2)f'x} = \frac{a^4}{f'a} \left(\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a+x} \right) + \frac{\xi(x)}{f'x};$$

здѣсь степень $\varphi(x) <$ степени $f'x$ и

степень $\xi(x) <$ степени $f'x$.

На этомъ основаніи

$$\sum_1^3 \frac{dx_i}{\left(1 - \frac{x_i^2}{a^2}\right) \Delta x} = \left[\frac{a^2}{f'a} d\alpha + \frac{a^4}{f'a} d\beta \right] \sum_1^3 \left\{ \frac{1}{a-x_i} + \frac{1}{a+x_i} \right\}$$

$$\text{Но } \sum_1^3 \left\{ \frac{1}{a-x_i} + \frac{1}{a+x_i} \right\} = \frac{f'a}{f(a)},$$

слѣдовательно

$$\sum_1^3 \frac{dx_i}{\left(1 - \frac{x_i^2}{a^2}\right) \Delta x_i} = \frac{a^2}{f(a)} d\alpha + \frac{a^4}{f(a)} d\beta.$$

Полагая $\alpha a + \beta a^3 = \zeta$, имѣемъ

$$\frac{1}{f(a)} = \frac{1}{(\Delta a)^2 - \zeta^2} = \frac{1}{2\Delta a} \left(\frac{1}{\Delta a + \zeta} + \frac{1}{\Delta a - \zeta} \right),$$

слѣдовательно:

$$\sum_1^3 \int_0^{x_i} \frac{dx_i}{\left(1 - \frac{x_i^2}{a^2}\right) \Delta x_i} = \frac{a}{2\Delta a} \int \frac{d\zeta}{\Delta a + \zeta} + \frac{a}{2\Delta a} \int \frac{d\zeta}{\Delta a - \zeta} +$$

$$+ \frac{a}{2\Delta a} \int \frac{d\zeta}{\Delta a + \zeta} + \frac{a}{2\Delta a} \int \frac{d\zeta}{\Delta a - \zeta} + C, \text{ или}$$

$$\sum_1^3 \int_0^{x_i} \frac{dx_i}{\left(1 - \frac{x_i^2}{a^2}\right) \Delta x_i} = \frac{a}{\Delta a} \log \frac{\Delta a + \alpha a + \beta a^3}{\Delta a - \alpha a - \beta a^3} + C =$$

$$= \frac{a}{2\Delta a} \log \left(\frac{\alpha a + \beta a^3 + \Delta a}{\alpha a + \beta a^3 - \Delta a} \right)^2 + C.$$

При $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ВЫХОДИТЬ $\beta = \infty$, $\alpha = \infty$, $\frac{\beta}{\alpha} = \infty$, слѣд.

$C = 0$, а потому

$$\sum_1^3 \int_0^{x_i} \frac{dx_i}{\left(1 - \frac{x_i^2}{a^2}\right) \Delta x_i} = \frac{a}{2\Delta a} \log \left(\frac{\alpha a + \beta a^3 + \Delta a}{\alpha a + \beta a^3 - \Delta a} \right)^2.$$

§ 4. Уравненіе Абеля

$$1 - (1 + k^2)x^2 + k^2x^4 - (\alpha x + \beta x^3)^2 = 0 \dots (1)$$

приводится къ виду

$$\frac{1}{x^6} - \frac{1 + k^2}{x^4} + \frac{k^2}{x^2} - \left(\frac{\alpha}{x^2} + \beta \right)^2 = 0.$$

Замѣчая, что $\frac{1}{x^2}$ есть цѣлая линейная функція отъ pi (функція Вейерштрасса), заключаемъ, что уравненіе (1) относительно pi будетъ вида

$$f(x) = 4p^3u - g_2pi - g_3 - (api + b)^2 = 0 \dots (2), pi = x.$$

Halphen пользуется этимъ уравненіемъ въ своемъ замѣчательномъ сочиненіи, на которое мы ссылались выше. Изъ уравненія (2) такимъ же, какъ и выше, способомъ получаемъ

$$du = 2 \frac{db}{f'x} + 2 \frac{x}{f'x} da,$$

$$u_1 + u_2 + u_3 = \text{періоду} \dots (3)$$

Сверхъ того

$$\Sigma p u_1 du_1 = 2 \Sigma \frac{x_1}{f'x_1} db + 2 \Sigma \frac{x_1^2}{f'x_1} da,$$

$$\text{но } \Sigma \frac{x}{f'x_1} = 0, \Sigma \frac{x_1^2}{f'x_1} = \frac{1}{4}, \text{ слѣд.}$$

$$\Sigma p u_1 du_1 = \frac{da}{2},$$

$$(4) \Sigma \int p u_1 du_1 = \frac{a}{2} + \text{const} = i \sqrt{p u_1 + p u_2 + p u_3} + C,$$

$$\text{гдѣ } i = \pm 1.$$

Положимъ $u_3 = \text{постоянному}$, тогда

$$-du_1 = du_2.$$

Дифференцируя (4) относительно u_1 , получимъ

$$p u_1 - p u_2 = \frac{p' u_1 - p' u_2}{i 2 \sqrt{p u_1 + p u_2 + p u_3}} \dots (5),$$

откуда

$$p u_1 + p u_2 + p u_3 = \frac{1}{4} \left(\frac{p' u_1 - p' u_2}{p u_1 - p u_2} \right)^2 \dots (A)$$

Это первая основная формула.

§ 5. Изъ уравн. (4) получаемъ

$$\Sigma \left\{ \frac{1}{u_1} + \int_0^{u_1} \left(\frac{1}{u^2} - p u \right) du \right\} = i \sqrt{p u_1 + p u_2 + p u_3} + C \dots (6)$$

Положимъ

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0,$$

$$\frac{1}{u} + \int_0^u \left(\frac{1}{u^2} - p u \right) du = \zeta(u);$$

тогда уравн. (6) приметъ форму

$$\zeta(u_1) + \zeta(u_2) - \zeta(u_1 + u_2) = \frac{i}{2} \frac{p' u_1 - p' u_2}{p u_1 - p u_2} + C;$$

отсюда

$$\zeta(u_1) - \zeta(u_2) - \zeta(u_1 - u_2) = \frac{i}{2} \frac{p'u_1 + p'u_2}{pu_1 - pu_2} + C,$$

$$2\zeta(u_1) - [\zeta(u_1 + u_2) + \zeta(u_1 - u_2)] = i \frac{p'u_1}{pu_1 - pu_2} + 2C.$$

Полагая $u_1 = \omega$ (полупериоду),
получимъ

$$\zeta(\omega) = \eta, \quad \zeta(\omega + u_2) + \zeta(\omega - u_2) = 2\eta, \quad p'\omega = 0, \quad \text{слѣд.}$$

$$C = 0,$$

а потому

$$\zeta u_1 + \zeta u_2 - \zeta(u_1 + u_2) = \frac{i}{2} \frac{p'u_1 - p'u_2}{pu_1 - pu_2}.$$

Положимъ $\lim (u_1) = 0$. Въ этомъ предположеніи
большая часть лѣвой стороны будетъ $\frac{1}{u}$, а правой стороны
будетъ $-\frac{i}{u}$, а потому $i = -1$.

Будемъ имѣть поэтому окончательно

$$\zeta u_1 + \zeta u_2 - \zeta(u_1 + u_2) = -\frac{1}{2} \frac{pu'_1 - p'u_2}{pu_1 - pu_2}.$$

Это вторая основная формула ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Halphen, p. 138.

ОТЧЕТЪ

СЕКЦІИ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХЪ НАУКЪ

Общества Естествоиспытателей при Императорскомъ
Казанскомъ Университетѣ

за девятый годъ.

(Май 1888—Май 1889).

Въ отчетномъ году секція приобрѣла 22 новыхъ члена, вслѣдствіе чего общее число лицъ, когда либо записавшихся въ ея члены, возрасло до 175. Изъ этого числа должны быть исключены 11 лицъ умершихъ и двое выбывшихъ, такъ что число наличныхъ членовъ секціи въ настоящее время есть 162.

Въ истекшемъ году секція лишилась двухъ своихъ городскихъ членовъ: Д. Д. Веретенникова и А. П. Орлова. А. П. Орловъ принималъ дѣятельное участіе въ занятіяхъ секціи, нѣсколько разъ былъ избираемъ ея вице-предсѣдателемъ; въ протоколахъ секціи помѣщены его работы: „О необходимости наблюденій малыхъ колебаній почвы“, „Разборъ сочиненія Клоссовскаго о новѣйшихъ успѣхахъ метеорологіи“, „Обзоръ сейсмическихъ и вулканическихъ явленій въ 1883 г.“ Потеря А. П. Орлова составляетъ для секціи замѣтную утрату.

Въ годичномъ засѣданіи 28 Мая 1888 года въ администрацію секціи были выбраны: предсѣдателемъ—А. В. Васильевъ, вице-предсѣдателемъ—Θ. М. Суворовъ, секретаремъ—

П. С. Порѣцкій, бібліотекаремъ—Н. П. Казанкинъ, членами комитета—И. С. Громека, Д. И. Дубяго, Н. П. Слугиновъ, А. П. Орловъ, И. А. Износковъ, І. А. Имшеникъ и Г. Н. Шебуевъ.

Въ Сентябрѣ 1888 года составъ администраціи секціи подвергся измѣненію вслѣдствіе заявленнаго П. С. Порѣцкимъ желанія сложить съ себя обязанности секретаря за отъѣздомъ изъ Казани. Оставленіе П. С. Порѣцкимъ поста секретаря секціи, занятаго имъ въ теченіе шести лѣтъ, было съ сожалѣніемъ встрѣчено секціей; постановлено было письменно благодарить П. С. отъ лица членовъ за труды, понесенные имъ на пользу секціи.

Вмѣсто выбывшаго П. С. Порѣцкаго въ секретари секціи въ засѣданіи 10 Сентября 1888 года выбранъ М. С. Сегель.

Въ отчетномъ году секція имѣла 10 засѣданій, въ которыхъ было сдѣлано 31 сообщеніе 16 лицами; приводимъ алфавитный списокъ лицъ, дѣлавшихъ сообщенія, съ указаніемъ названій сообщеній:

Д. А. Гольдгаммеръ: а) объ электродинамическихъ колебаніяхъ, б) нѣсколько замѣчаній по поводу статьи Ефимова о магнетизмѣ газовъ, с) объ опытахъ Кундта надъ опредѣленіемъ показателей преломленія металлическихъ призмъ, d) этюды по теоріи свѣта.

Студентъ П. П. Граве: Новый выводъ формулы Чебышева для интерполированія по способу наименьшихъ квадратовъ.

И. П. Долбня: а) о критеріи Галоа разрѣшимости алгебраическихъ уравненій въ радикалахъ, б) о сложеніи эллиптическихъ аргументовъ 1-го, 2-го и 3-го вида, с) о безконечныхъ непрерывныхъ дробяхъ.

А. К. Жбиковскій: къ вопросу о нахожденіи высшаго предѣла дѣйствительныхъ корней уравненій.

Н. П. Казанкинъ: а) о Павловской магнитной обсерваторіи, б) о новѣйшихъ изслѣдованіяхъ по электрооптикѣ, с) замѣтка объ элементѣ съ двухромокислымъ натромъ.

І. А. Клейбергъ: о примѣненіи способа сглаживанія къ механическимъ квадратурамъ.

К. И. Котеловъ: объ особомъ видѣ разложенія нѣкоторыхъ голоморфныхъ функцій въ безконечныя произведенія.

Студ. Ѳ. П. Лаптевъ: о гальваническомъ элементѣ съ магніемъ.

Н. А. Миславскій: а) о фотохимическихъ процессахъ въ сѣтчатой оболочкѣ глаза, б) примѣненіе фізіологическаго реоскопа къ демонстраціи телефонныхъ токовъ.

Н. В. Нечаевъ: о рѣшеніи уравненій электричествомъ.

П. С. Портыкій: а) по поводу брошюры Волкова: „Логическое исчисленіе. Спб. 1888“, б) новый способъ составленія таблицъ простыхъ чиселъ и дѣлителей.

П. В. Преображенскій: принципъ узловыхъ точекъ.

П. И. Свѣшниковъ: объ опредѣленіи коэффиціентовъ расширенія твердыхъ тѣлъ изъ наблюденій надъ качаніемъ маятниковъ.

Н. П. Слугиновъ: а) о теплѣ Вольтовой дуги, б) объ оптическихъ рулетахъ, с) о скорости распространенія колебательнаго движенія.

М. М. Фроловъ: а) рѣшеніе нѣсколькихъ задачъ, относящихся до волшебныхъ круговъ, б) о волшебныхъ звѣздахъ.

Г. Н. Шебуевъ: а) къ теоріи упругаго послѣдѣйствія, б) о вліяніи упругаго послѣдѣйствія на колебанія струнъ, с) о варіированіи системы векторовъ, д) замѣтка объ извлеченіи корней изъ алгебраическихъ многочленовъ.

Кромѣ того въ нѣкоторыхъ засѣданіяхъ секціи Н. П. Слугиновъ, Н. П. Казанкинъ и К. В. Кебель демонстрировали новые приборы фізическаго кабинета.

Изданія физико-математической секціи Общества Естествоиспытателей при Казанскомъ университетѣ.

- 1) Собраніе протоколовъ, томъ 1-й, цѣна 2 р.
 - 2) Тоже, томъ 2-й; цѣна: съ кабинетнымъ портретомъ Н. И. Лобачевского 2 р., безъ портрета 1 р. 75 к.
 - 3) Тоже, томъ 3-й; цѣна: съ кабинетнымъ портретомъ М. А. Ковальскаго 1 р. 75 к., безъ портрета 1 р. 50 к.
 - 4) Тоже, томъ 4-й; цѣна 1 р. 50 к.
 - 5) Тоже, томъ 5-й; цѣна: съ кабинетн. портретомъ П. И. Котельникова 1 р. 75 к., безъ портрета 1 р. 50 к.
 - 6) Тоже, томъ 6-й; цѣна 1 р. 50 к.
 - 7) Тоже, томъ 7-й; цѣна 1 р. 50 к.
 - 8) Брошюра «М. А. Ковальскій» съ кабинетн. портретомъ; цѣна 60 к.
 - 9) Брошюра «П. И. Котельниковъ»; цѣна съ кабинетн. портретомъ 50 к., безъ портрета 30 к.
 - 10) Каталогъ библіотеки секціи; цѣна 25 к.
-